Problemes

En el número anterior de la *SCM/Notícies* us fèiem saber que, just en el punt de tancar la secció de problemes, havíem rebut una solució del problema **B47**, proposat a la *SCM/Notícies* 14, i reptàvem els nostres lectors amb l'**A64**, proposat a la *SCM/Notícies* 20, encara no resolt fins al moment. Doncs bé, no només tenim la satisfacció de publicar la solució del problema **B47**, de Ramon González Calvet, de l'Institut Pere Calders de Cerdanyola del Vallès, sinó que en Juan Luis Monterde, de la Universitat de València, va recollir el repte de l'**A64** i ens n'ha enviat la solució, que podreu llegir més avall d'aquestes línies. A tots dos, el nostre agraïment!

Dels quatre problemes proposats al número anterior només hem rebut solucions de l'**A106** i de l'**A108**. De l'**A106** en publiquem la solució, aportada per Joan Josep Carmona (UAB), complementada amb una nota bibliogràfica. D'aquest mateix problema també tenim la solució de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo), també amb notes bibliogràfiques. La solució que publiquem del problema **A108** és de Joaquim Nadal i Vidal, de l'IES de Cassà de la Selva, i també n'hem rebut dues més de Bruno Salgueiro i Juan Luis Monterde.

Quant als quatre problemes que proposem a continuació, de l'**A109** a l'**A112**, en fem constar l'autoria, que correspon a José Luis Díaz-Barrero, Xavi Ros Otón, Joaquim Nadal i Vidal i la redacció, respectivament.

Aquesta secció, com és ben manifest, es fonamenta en la col·laboració dels nostres lectors i, per tant, els agraïments són recíprocs entre tots plegats. Recordeu que si ens trameteu el vostre treball en format TEX o LaTEXens féu la feina molt més fàcil, tot i que les aportacions en qualsevol altre format, també manuscrits, són igualment ben rebudes. L'adreça de correu per a enviar-nos-les és `carles.romero.c@gmail.com`. Fins a la propera!

Problemes proposats

A109. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona.) Trobeu totes les solucions reals del sistema

$$\begin{cases} 2x_1^2 = x_2\left(x_1^2+1\right) \\ 3x_2^3 = x_3\left(x_2^4+x_2^2+1\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ nx_{n-1}^n = x_n\left(x_{n-1}^{2n-2}+\cdots+x_{n-1}^2+1\right) \\ (n+1)x_n^{n+1} = x_1\left(x_n^{2n}+x_n^{2n-2}+\cdots+x_n^2+1\right) \end{cases}$$

A110. (Proposat per Xavi Ros Otón, UPC, Barcelona.) Tenim una formiga situada en el punt $x=0$ de la recta real. Aquesta formiga es mou amb passets de tamany $1/n$ i, abans de fer cada passet, decideix aleatòriament si el fa cap la dreta o bé cap a l'esquerra. Quin és el nombre esperat de passets que haurà de fer la formiga per arribar a un dels dos extrems de l'interval $[-1,1]$?

A111. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, de l'IES de Cassà de la Selva.) Sigui ABC un triangle i sigui $B'C'$ una recta variable paral·lela al costat BC, amb B' sobre el costat AC i C' sobre el costat AB. Trobeu el lloc geomètric del punt I d'intersecció dels segments BB' i CC'.

A112. (Proposat per la redacció.) Trobeu les solucions reals de l'equació

$$x^2+2ax+a+\frac{1}{16}=\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$$

per a $0<a<1/4$.

Solucions

B47. (Proposat per Alfredo Cal Díaz (†1956).) Anomenem *rosari* d'un triangle esfèric relativament a un dels seus costats al cercle màxim perpendicular al costat en qüestió i que forma angles iguals amb els altres dos costats. Demostreu les següents propietats del rosari:

a) El rosari d'un triangle relativament a un costat coincideix amb la mediana corresponent del triangle polar.

b) Els tres rosaris d'un triangle es tallen en un punt.

c) La mediana d'un triangle i el rosari del polar són suplementaris.

d) Si es perllonguen 90° els rosaris d'un triangle a partir dels costats, s'obté el polar.

Solució: (Solució de Ramon Gonzàlez Calvet, IES Pere Calders, Cerdanyola del Vallès.) Per resoldre aquest problema, són suficients les eines de l'anàlisi vectorial. Si A, B, i C són els vèrtexs d'un triangle esfèric sobre una esfera de radi unitat, alhora també representen els vectors unitaris des del centre de l'esfera fins cada vèrtex. Així, doncs, el vector normal del pla central que conté el costat AB ve donat pel producte vectorial dels dos punts $A \times B$, que alhora té la direcció del pol C' de AB, un dels vèrtexs del triangle polar $A'B'C'$. Així, doncs:

$$A' = \frac{B \times C}{|B \times C|}, \quad B' = \frac{C \times A}{|C \times A|}, \quad C' = \frac{A \times B}{|A \times B|}$$

Considerem el rosari r_C, que és perpendicular al costat AB. Com que forma angles iguals amb els costats CA i CB, tenim

$$\alpha = \widehat{CA, r_C} = \widehat{r_C, CB}$$

i, aleshores, el vector normal $\vec{r}_C$ del pla que conté aquest rosari compleix que:

$$\vec{r}_C \cdot \frac{C \times A}{|C \times A|} = \vec{r}_C \cdot \frac{C \times B}{|C \times B|}$$

que implica

$$\vec{r}_C \cdot \left(A' + B'\right)$$

D'altra banda, el rosari es perpendicular a AB:

$$\vec{r}_C \cdot \frac{A \times B}{|A \times B|} = 0$$

que queda:

$$\vec{r}_C \cdot C' = 0$$

i, per tant, el rosari r_C és perpendicular simultàniament a $A' + B'$ i a C'. Podem obtenir el vector normal del seu pla a partir del producte vectorial:

$$\vec{r}_C = \left(A' + B'\right) \times C'$$

De la mateixa manera, obtenim els vectors normals dels plans que contenen els altres dos rosaris del triangle ABC:

$$\vec{r}_A = \left(B' + C'\right) \times A', \quad \vec{r}_B = \left(C' + A'\right) \times B'$$

Comprovem que els tres rosaris es tallen en un punt. Això passarà si els tres plans que els contenen pertanyen al mateix feix de plans, cosa que s'esdevindrà si, i només si, hi ha una combinació lineal no trivial dels tres vectors normals idènticament nul·la, atès que tots els plans que considerem passen pel centre de l'esfera. I, efectivament,

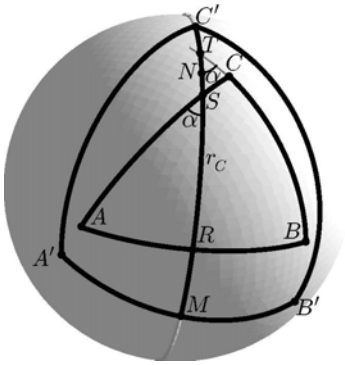
$$\begin{aligned}\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_A &= \left(B' + C'\right) \times A' + \\ &\quad + \left(C' + A'\right) \times B' + \left(A' + B'\right) \times C' = \\ &= B' \times A' + C' \times A' + C' \times B' + \\ &\quad + A' \times B' + A' \times C' + B' \times C' = 0\end{aligned}$$

perquè el producte vectorial és antisimètric. Queda demostrat, doncs, l'apartat *b*).

Si perllonguem 90° el rosari r_C del costat AB, obtenim el vèrtex C' del triangle polar (apartat *d*)). Això és trivial pel fet que tots els cercles màxims perpendiculars a AB es tallen en el pol C', que està a 90° de AB. Una analogia geogràfica és que tots els meridians, que són perpendiculars a l'equador, es creuen en els pols. Ara cal demostrar que, de tots els cercles màxims que passen per C', el rosari coincideix amb la mediana del triangle polar. La mediana del triangle polar està continguda en el pla que passa per C' i per $\left(A' + B'\right)/2$, el punt mitjà de la corda $A'B'$. El vector normal del pla que conté la mediana és, doncs,

$$\vec{m}_C = \left(A' + B'\right) \times C = \vec{r}_C$$

és a dir la mediana i el rosari estan sobre el mateix pla i, per tant, sobre el mateix cercle màxim. Queda demostrat, doncs, l'apartat *a*).



Considerem ara el cercle màxim que conté la mediana del triangle polar i el rosari. Un arc d'aquest cercle màxim és la mediana, des de C' fins al costat $A'B'$, és a dir, fins al punt M. Un altre arc és el rosari, però a l'enunciat del problema no queda clar quin arc és, perquè cal tenir en compte que el rosari del costat AB no

passa pas pel vèrtex C. Si definim el rosari com l'arc d'aquest cercle màxim que va des del costat AB fins al punt N, punt mitjà, sobre l'esfera, de les interseccions amb els costats BC i CA (punts T i S respectivament), aleshores podrem demostrar la propietat que la mediana i el rosari són suplementaris.

El punt S d'intersecció del rosari r_C amb el costat AC ve donat per:

$$S = \frac{\vec{r}_C \times (C \times A)}{|\vec{r}_C \times (C \times A)|} = \frac{\vec{r}_C \times B'}{|\vec{r}_C \times B'|} = \\ = \frac{\vec{r}_C \times B'}{|\vec{r}_C| \left|\sin\left(\widehat{r_C, CA}\right)\right|}$$

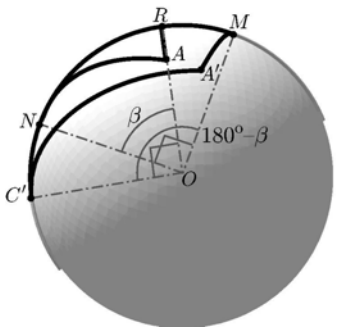
i el punt T d'intersecció del rosari r_C amb el costat BC és:

$$T = \frac{\vec{r}_C \times (B \times C)}{|\vec{r}_C \times (B \times C)|} = \frac{\vec{r}_C \times A'}{|\vec{r}_C \times A'|} = \\ = \frac{\vec{r}_C \times A'}{|\vec{r}_C| \left|\sin\left(\widehat{r_C, BC}\right)\right|}$$

Ara, atès que els dos angles són iguals en valor absolut, el valor absolut dels seus sinus també ho és i el punt mitjà N de l'arc que va de S a T té la direcció de $(S+T)/2$ i ve donat per:

$$N = \frac{\vec{r}_C \times (A' + B')}{|\vec{r}_C \times (A' + B')|}$$

Observem ara que N resulta ser perpendicular al vector $(A' + B')/2$ segons resulta de l'obtenció per producte vectorial i, per tant, N és perpendicular al punt mitjà M del costat $A'B'$ del triangle polar. D'altra banda, com ja s'ha vist abans, R és perpendicular a C'. La conseqüència immediata és que la mediana $C'M$ i el rosari NR són arcs suplementaris, com es veu en el dibuix.



Òbviament, això també val pel triangle polar: el rosari del polar és suplementari de la mediana corresponent del triangle ABC, perquè aquest darrer és el polar del triangle $A'B'C'$ (apartat c) de l'enunciat).

Finalment, vull destacar que els punts d'intersecció de les tres medianes del triangle polar i el d'intersecció dels tres rosaris són coincidents.

A64. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, a partir d'un enunciat del doctor Josep Teixidor de 1969.) A $\mathbb{R}^3$ hi considerem un paraboloide el·líptic. Trobeu el lloc geomètric dels centres de les esferes que tallen el paraboloide segons parelles de circumferències.

Solució: (Solució de Juan Luis Monterde Garcia-Pozuelo, Universitat de València.) Donats un angle $\alpha \in [0, \pi/2]$ i un nombre real positiu a, considerem les transformacions de $\mathbb{R}^3$ definides per

$$F_{a,\alpha}(x,y,z) = \\ = \left(T_{\left(0, \frac{a^2}{4}\sin 2\alpha, \frac{a^2}{4}\sin^2\alpha\right)} \circ R^x_{(0,0,z),\pm\alpha}\right)(x,y,z)$$

on $T_{\vec{v}}$ denota la translació de vector $\vec{v}$ i $R^x_{C,\alpha}$ denota la rotació d'eix x, centre C i angle α. Explícitament:

$$F_{a,\alpha}(x,y,z) = \left(x, y\cos\alpha + \frac{a^2}{4}\sin 2\alpha, \\ z + y\sin\alpha + \frac{a^2}{4}\sin^2\alpha\right)$$

Tant $F_{a,\alpha}$ com $F_{a,-\alpha}$ transformen el paraboloide circular d'equació $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} = z$ en el paraboloide el·líptic d'equació

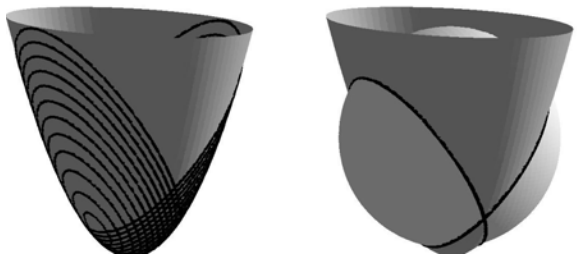
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2\cos^2\alpha} = z$$

A més a més, transformen les circumferències del paraboloide circular definides per seccions amb plans horitzontals, en circumferències contingudes en el paraboloide el·líptic. Concretament, la circumferència del paraboloide circular d'altura $h \geq 0$, que podem parametritzar per

$$\left(a\sqrt{h}\cos t,\ a\sqrt{h}\sin t,\ h\right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

es transforma en les circumferències incloses en el paraboloide el·líptic parametritzades per

$$\left(a\sqrt{h}\cos t,\ \pm\frac{a^2}{4}\sin 2\alpha + a\sqrt{h}\cos\alpha\sin t, \\ h + \frac{a^2}{4}\sin^2\alpha \pm a\sqrt{h}\sin\alpha\sin t\right) \qquad (*)$$



Esquerra: el paraboloide el·líptic construït amb circumferències. Dreta: una de les esferes i les dues circumferències intersecció.

Ara ja és fàcil comprovar que el centre de l'esfera que inclou les dues circumferències $(*)$ és

$$\left(0, 0, h + \frac{a^2}{4}(1+\cos^2\alpha)\right)$$

i que el seu radi fa $\frac{a}{2}\sqrt{4h + a^2\cos^2\alpha}$.

Per tant, el lloc geomètric dels centres de les esferes que tallen el paraboloide el·líptic segons parelles de circumferències és una semirecta vertical superior que comença en el punt $\left(0,\, 0,\, \frac{a^2}{4}\left(1+\cos^2\alpha\right)\right)$, o en el punt $\left(0,\, 0,\, \frac{a^2+b^2}{4}\right)$ si el paraboloide el·líptic té per equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

Notes: (Juan Luis Monterde.)

La idea de fer servir les seccions horitzontals d'un paraboloide circular i, mitjançant una rotació i una translació, generar les seccions circulars del paraboloide el·líptic l'he trobada en l'article de Pedro Pablo Company Calleja i José María Gomis Martí, de la Universitat Politècnica de València, «Secciones cíclicas en el paraboloide elíptico» (*Actas del XI Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica*, vol. 1, 401–414, Pamplona–Logroño, 1999).

Maria Garcia Monera (Universitat Politècnica de València) m'ha assenyalat que a la pàgina web del Museu de la Ciència de Londres `http://www.sciencemuseum.org.uk/images/I046/10314734.aspx` es poden contemplar construccions reals datades l'any 1901 de diverses superfícies quàdriques fent servir secciones circulars.

A106. (Proposat per Xavi Ros Otón, UPC, Barcelona.) Sigui $\{a_n\}$ una successió de nombres reals i positius. Proveu que si la sèrie $\sum a_n$ és convergent, aleshores també ho és la sèrie $\sum b_n$, en la qual

$$b_n = \frac{a_n}{\sqrt{\sum_{k\geq n} a_k}}\,.$$

Solució: (Solució de Joan Josep Carmona Domènech, UAB.) Escrivim $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ i de la desigualtat $\sqrt{R_{n+1}} < \sqrt{R_n}$ s'obté

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{\sqrt{R_n}} &= \frac{2a_n}{\sqrt{R_n}+\sqrt{R_n}} < \frac{2a_n}{\sqrt{R_n}+\sqrt{R_{n+1}}} = \\ &= \frac{2a_n\left(\sqrt{R_n}-\sqrt{R_n}\right)}{R_n - R_{n+1}} = \\ &= \frac{2a_n\left(\sqrt{R_n}-\sqrt{R_{n+1}}\right)}{a_n} = \\ &= 2\left(\sqrt{R_n}-\sqrt{R_{n+1}}\right) \qquad (*)\end{aligned}$$

Ara, com que la sèrie $\sum a_n$ és convergent, $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, cosa que ens diu que la sèrie telescòpica $\sum\left(\sqrt{R_n}-\sqrt{R_{n+1}}\right)$ és convergent i, fent servir $(*)$, es conclou la convergència de la sèrie demanada. A més a més s'ha demostrat que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{R_n}} \leq 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^{\frac{1}{2}}$$

Notes: (Joan Josep Carmona)

L'enunciat proposat és un cas particular d'un teorema de Dini que diu:

> Sigui $\sum a_n$ una sèrie convergent de termes positius. i posem $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Aleshores la sèrie
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{R_n^{\alpha}}}$$
>
> és convergent si $\alpha < 1$ i divergent en cas contrari.

La demostració es pot trobar a diversos llocs, com, per exemple, al llibre de Konrad Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, Dover Publications, 1990, pàg. 293.

Addendum: (Redacció). Una edició de 1954, amb la mateixa paginació, és accessible en els formats PDF o DjVu a `http://www.archive.org/details/theoryandapplica031692mbp`

A108. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.) $ABCD$ és un quadrilàter convex en el qual $\widehat{ABC} = 90^\circ$ i, a més,

$$\frac{AD}{BC} = \frac{CD}{AB} = \frac{BD}{AC}$$

Provau que aquest quadrilàter és un rectangle.

Solució: (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, de l'INS de Cassà de la Selva.) Com que l'angle $\widehat{ABC}$ és recte, podem col·locar els vèrtexs A, B i C sobre un sistema d'eixos. Siguin

$$A = (0, a)\,,\ B = (0, 0)\,,\ C = (c, 0) \text{ i } D = (d_x, d_y)$$

i, per provar que el quadrilàter convex $ABCD$ és un rectangle, n'hi haurà prou a veure que $d_x = x$ i que $d_y = a$.

A partir de la igualtat del quadrat de les fraccions de l'enunciat, tenim:

$$\frac{d_x^2 + (d_y - a)^2}{c^2} = \frac{(d_x - c)^2 + d_y^2}{a^2} = \frac{d_x^2 + d_y^2}{c^2 + a^2} \qquad (*)$$

i, com que de les igualtats

$$\frac{p}{u} = \frac{q}{v} = \frac{r}{u + v}$$

es desprèn de manera òbvia que $r = p + q$, en aplicar això a les igualtats $(*)$ obtenim:

$$d_x^2 + d_y^2 = d_x^2 + (d_y - a)^2 + (d_x - c)^2 + d_y^2$$

és a dir

$$(d_y - a)^2 + (d_x - c)^2 = 0$$

que implica $d_x = x$ i $d_y = a$, tal com volíem veure.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Tesis i treballs de fi de màster

Ajuts per a tesis doctorals en català

La Generalitat de Catalunya (a través de l'AGAUR) dóna ajuts especials per a escriure les tesis en català.

Els poden sol·licitar tots aquells a qui els falti poc per escriure i defensar la tesi doctoral.

L'última convocatòria es va tancar el 15 de juliol passat, però es preveu que es tornarà a obrir aquest curs.

L'objectiu dels ajuts era atorgar ajuts per a tesis doctorals escrites en català que s'haguessin defensat durant l'any 2010, per tal de contribuir a les despeses i taxes administratives associades amb la finalització de la tesi doctoral i amb el tràmit d'obtenció del títol de doctor o doctora.

Podien sol·licitar l'ajut totes les persones que haguessin defensat la tesi durant l'any 2010, que haguessin obtingut el títol de doctor en una universitat del sistema universitari de Catalunya o de fora de l'Estat espanyol, i que haguessin escrit la tesi en català, d'acord amb la base 1 de la convocatòria.

Més informació:

http://www10.gencat.cat/agaur_web/AppJava/catala/a_beca.jsp?categoria=altres&id_beca=17741